А. М. ТИТОВ.

Вывод закона отражения света от движущегося зеркала на основании теоремы сложения скоростей Эйнштейна.

§ 1. **Введение:** *Закон отражения света от движущегося зеркала в электродинамике.* Не лишним будет привести краткий обзор положения данного вопроса до работ Эйнштейна. К наиболее замечательным следствиям электромагнитного поля принадлежит световое давление, существование которого было экспериментально подтверждено П. Лебедевым[1]), E. Nichols,ом и .G Hull,ом[2]). Неоднократно указывалось, что световое давление в толковании его электронной теорией противоречит третьему закону Ньютона[3]). Действительно сила, с которой, испускаемая лучистая энергия действует на источник света сначала вследствие конечности скорости распространения света не компенсируется ни какой противоположной силой и только в том случае, если свет упадет на другое тело, проявляется действие силы противоположного направления. Таким образом механический закон сохранения количества движения в замкнутой системе не мог быть сохранен с точки зрения электронной теории, ибо электронная теория не вводит допущений существования гипотетических механических сил, проявляющихся в электромагнитном поле в пустоте[4]). Отрицание существования такого рода сил является следствием невозможности построить механическую модель светового эфира, окончательно выяснившуюся ко времени возникновения электронной теории. Только после введения M. Abraham,ом[5]) в электронную теорию понятия электромагнитного количества движения электромагнитного поля оказалось возможным устранить вышеуказанное противоречие закону сохранения импульса. Электромагнитным количеством движения поля M. Abraham,ом была названа величина

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S} dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

[1]) П. Н. Лебедев. Ж.Р.Ф.Х.О. 32 р. 211. 1900.
[2]) E. Nichols u G. Hull. Annal. d. Phys. 12 p. 225. 1903.
[3]) Poincare. Electricité et optique. p. 448.
[4]) H. A. Lorentz. Versuch einer Theorie der electrishen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern Zeiden. 1895.
[5]) M. Abraham. Annal. d Phys. 10 p. 125. 1903.

Здесь c—скорость света в пустоте, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ вектор Пойнтинга, равный векториальному произведению напряжений: $\mathbf{E}$ — электрического поля и $\mathbf{H}$ —магнитного поля. Интеграл распространен по об,ему поля.

Для случая плоских световых волн направление вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ совпадает с направлением нормали к плоскости волны; абсолютная величина $\mathbf{S}$ равна количеству лучистой энергии, проходящей в единицу времени через квадратный сантиметр плоскости цараллельной плоскости волны, иначе говоря $[\mathbf{S}]$ (обозначаемая дальше через S) равна количеству лучистой энергии, заключающейся в цилиндре с основанием в 1 кв. см. и высотой c. Интеграл (1), взятый по об'ему этого цилиндра в продположении, что плотность потока лучистой энергии везде одинакова, дает электромагнитное количество движения, несомое лучистой энергией указанного цилиндра:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \cdot c = \frac{\mathbf{S}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$|\mathbf{G}| = \frac{|\mathbf{S}|}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Таким образом световым волнам следуег приписывать не только энергию, но и количество движения, величина которого равна частному от деления энергии световых волн на скорость света.

Точно также, как устраняется противоречие закону сохранения энергии принятием электромагнитной энергии, заключающейся в световых волнах, аналогично устраняется и противоречие закону сохранения механического количества движения, введением понятия электромагнитного количества движения; и закон постоянства количества движения в новой расширенной формулировке может быть высказан так: Сумма механического и электромагнитного количества движения в замкнутой системе остается постоянной[1]). Вместе с тем введение понятия электромагнитного количества движения позволило решить вопрос об отражении света от дыижущегося зеркала. Это решение основано на связи между световым давлением и электромагнитным количеством движения. Представим себе абсолютно черную поверхность, расположенную перпендикулярно к направлению распространения световых лучей, тогда лучи будут поглощаться и электромагнитная энергия лучей будет переходить в тепловую. Точно также электромагнитное количество движения уничтожается и переходит в механическое количество движения. Или, иначе говоря, свет призводит на поглощающую поверхность давление и это давление на кв. см. абсолютно черной поверхности, перпендикулярной к направлению распространения световых лучей,

[1]) M. Abraham. Theorie der Electriziät 2 p. 28. 1920.

равно электромагнитному количеству движения, падающему в 1 секунду на 1 кв. см. этой поверхности.

Вывод закона отражения света от движущегося зеркала, предложенный M. Abraham,ом в 1904 г.[1]) т.-е. до появления работы Эйнштейна о специальном принципе относительности, замечалетен тем, что для решения вопроса совершенно не требуется применения принципа отностиельности, т. к. весь вывод делается с точки зрения одной координатной системы, лишь-бы в рассматриваемой координатной системе выполнялись основные положения электродинамики[2]) и нет никакой надобности значения всех встречающихся при выводе величин определять в какой либо другой, движущейся относительно первой, координатной системе. Так как вывод M. Abraham,a базируется только на основных положениях классической электродинамики[3]), то вывод следует признать в явном виде не зависящим от принципа относительности. В основу вывода кладутся нижеследующие положения: 1) скорость распространения света в пустоте относительно некоторой координатной системы одинакова по всем направлениям и не меняется от движения тел (в частности зеркала); 2) в некоторой координатной системе выполняются основные уравнения электродинамики (электронной теории); 3) световые волны, кроме электромагнитной энергии, содержат и электромагнитное количество движения, направление которого совпадает с направлением распространения волн, а численное значение равно частному от деления энергии волн на скорость распространения света; 4) зеркалу приписывается коэффициент отражения r, равный еденице; такой случай, конечно, будет идеальным и только приближенно осуществим в природе. Подобного рода предельными случаями часто пользуются в физике, достаточно вспомнить абсолютно твердое тело в механике, идеальные газы и идеальные разбавленные растворы в термодинамике.

Рассмотрим самый вывод, который является очень простым.

Пусть в пустоте в координатной системе OXУZ (черт.1) движется со скоростью v, постоянною по величине и направлению, совершенное зеркало P. v_x ; v_y ; v_z — проэкции скорости зеркала на координатные оси; c—скорость света в пустоте. Ось OX направлена по нормали к зеркалу и пусть падающий луч лежит в плоскости XOУ. α_1 и α_2 соответственно угол падения и отражения.

Обозначим через:

$$\beta_x = \frac{v_x}{c}\ ;\quad \beta_y = \frac{v_y}{c}\ ;\quad \beta_z = \frac{v_z}{c} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем считать известным нижеследующее свойство совершенного зеркала: световое давление направлено

[1]) M. Abraham. Annal. d. Phys. 14 p. 247. 1904.
Theorie der Electrizät. 2 p. 322. 1920.

[2]) M. Abraqam. Annal. d. Phys. 14 p. 240. 1904.

[3]) M. Abraham. Theorie der Electrizïtät 2 p.p. 311. 323. 1920.

всегда по нормали к поверхности зеркала. Это положение было доказано, исходя из основных уравнений электродинамики, M. Abraham,ом[1]) для движущегося зеркала, а также Plank,ом для неподвижного зеркала[2]).

На основании указанного свойства совершенного зеркала процесс отражения следует представлять так: нормальные составляющие электромагнитного количества движения падающего и отраженного лучей обусловливают световое давление, тангенциальная же составляющая падающего луча переходит без изменения в тангенциальную составляющую отраженного. Отсюда следует, что лучь падающий и отраженный лежат в одной плоскости с нормалью к зеркалу. Пусть S_1 и S_2 будут количества лучистой энергии, проносимой в секунду через единицу поверхности перпендикулярной к направлению соответственно падающей и отраженной световых волн. Нетрудно видеть, что количество лучистой энергии, падающей в 1 секунду на единицу поверхности зеркала, будет равно энергии, заключающейся в параллелепипеде с основанием в 1 кв. см. и высотой $c\cos\alpha_1 + v_x$.

Таким образом, количества падающей и отраженной энергии выразятся:

$$\frac{S_1}{c}(c\cos\alpha_1 + v_x) = S_1(\cos\alpha_1 + \beta_x) \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\frac{S_2}{c}(c\cos\alpha_2 - v_x) = S_2(\cos\alpha_2 - \beta_x) \quad \ldots\ldots (6)$$

Соответственным образом определятся падающее и отраженное в ед. времени на 1 кв. см. электромагнитные количества движения.

$$\frac{S_1}{c}(\cos\alpha_1 + \beta_x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\frac{S_2}{c}(\cos\alpha_2 - \beta_x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Так как световое давление действует нормально к поверхности зеркала, то как было указано тангенциальные составляющие падающего и отраженного электромагнитных количеств движения должны быть равны:

$$\frac{S_1}{c}(\cos\alpha_1 + \beta_x)\sin\alpha_1 = \frac{S_2}{c}(\cos\alpha_2 - \beta_x)\sin\alpha_2 \quad \ldots\ldots (9)$$

Нормальные составляющие электромагнитных количеств движения противоположны по знаку и их разность, равная сумме обсолютных значений определяет величину светового давления P:

$$P = \frac{S_1}{c}(\cos\alpha_1 + \beta_x)\cos\alpha_1 + \frac{S_2}{c}(\cos\alpha_2 - \beta_x)\cos\alpha_2 \quad \ldots (10)$$

---

[1]) M. Abraham. Theorie der Electrizitat 2 p. 311. 1920.

[2]) M. Plank Vorlesungen über die Theorie der Wärméstrahlung. p. 50. 1921,

По закону сохранения энергии работа, производимая зеркалом против светового давления P, должна быть равна избытку отраженной энергии над падающей:

$$P \cdot v_x = S_2 (\cos\alpha_2 - \beta_x) - S_1 (\cos\alpha_1 + \beta_x) \quad \dots\dots (11)$$

Подставляя P из (10), после преобразования имеем:

$$S_1 (\cos\alpha_1 + \beta_x)(1 + \beta_x \cos\alpha_1) = S_2 (\cos\alpha_2 - \beta_x)(1 - \beta_x \cos\alpha_2) \quad . (12)$$

и разделив на (9) получаем закон отражения света от движущегося зеркала в следующей форме:

$$\frac{1 + \beta_x \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{1 - \beta_x \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \quad \dots\dots (13)$$

Выведенная формула дает следующие пределы для косинусов углов α_1 и α_2.

$$-\beta_x \leq \cos\alpha_1 \leq 1, \; +\beta^x \leq \cos\alpha_2 \leq 1$$

Нижние предельные значения $-\beta_x$ и $+\beta_x$ должны быть откинуты, т. к. формула (10) дает для P значение O. Вследствие этого всегда:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 > 0$$

Из тождества:

$$(1 + \beta_x \cos\alpha_1)^2 \sin^2\alpha_1 - (1 - \beta_x \cos\alpha_2)^2 \sin^2\alpha_2 = (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \left[2\beta_x - 2\beta_x \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + (1 + \beta_x^2)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\right]$$

и из уравнения (13) вытекает уравнение:

$2\beta_x - 2\beta_x \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + (1 + \beta_x^2)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 0$, которое может быть преобразовано в следующее:

$$(\beta_x + \cos\alpha_1)(1 - \beta_x \cos\alpha_2) + (\beta_x - \cos\alpha_2)(1 + \beta_x \cos\alpha_1) = 0 \quad . . (14)$$

Уравнение (14) дает закон отражения в таком виде:

$$\frac{1 + \beta_x \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 + \beta_x} = \frac{1 - \beta_x \cos\alpha_2}{\cos\alpha_2 - \beta_x} \quad \dots\dots (15)$$

Делением (15) на (13) получается еще одна новая форма закона отражения света от движущегося зеркала:

$$\frac{\beta_x + \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{-\beta_x + \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \quad \dots\dots (16)$$

§ 2. *Закон отражения света от движущегося зеркала в специальной теории относительности.*

Казалось бы вполне естественным, зная закон отражения света от зеркала, покоющегося вместе с наблюдателем в некоторой координатной системе, при помощи формул преобразования Лоренца получить закон отражения для случая зеркала движущегося относительно наблюдателя и полученный результат сравнить с формулами, найденными M. Abraham,ом, однако насколько мне позволяет судить имевшаяся у меня по данному вопросу литература, такого сравнения не было сделано и на формы, данные M. Abraham,ом, в теории относительности не указывается. В сочинении M. Laue «Die Relativitätstheorie», которое является одним из наиболее полных и замечательных трудов в данной области, имеется вывод закона отражения[1]). Но M. Laue получил закон отражения от движущегося зеркала в иной форме:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}} = \frac{c+v_x}{c-v_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Однако, исходя из принципа относительности и преобразований Лоренца, нетрудно поллучить закон отражения в одной из форм, данных M. Abraham,ом. Легко получается одна из таких форм, именно (15) и из выкладок M. Laue, и то обстоятельство, что на это не было указано M. Laue, представляет по моему мнению случайность.

В настоящей работе предлагается вывод закона отражения света от движущегося зеркала на основании теории относительности; причем для вывода мы не пользуемся даже уравнением плоской электромагнитной волны, т.-е. не рассматриваем явления по существу. Вывод ведется так казать на формальных основаниях: векториального разложения скоростей падающего и отраженного лучей и применения теоремы сложения скоростей Эйнштейна при переходе от одной координатной системы к другой. Вывод приводит к формам, данным M. Abraham,ом. В предыдущей работе[2]) был рассмотрен частный случай, когда нормаль к зеркалу, падающий луч и скорость зеркала лежат в одной плоскости и *вывод был сделан только при помощи гипотезы сокращения Лоренца*. В настоящей работе рассматривается общий случай: какой угодно ориентации зеркала, луча и скорости движения зеркала. Предлагаемый вывод имеет некоторое преимущество перед выводом, изложенным M. Laue, т. к. здесь не делается допущения, что одновременное существование тангенциальной и нормальной составляющих скорости зеркала не меняет закона отражения, что a priori не совсем ясно, кроме того явление рассматривается в более общем виде: рассматривается движение зеркала вместе со средой. В частном случае при $n^0 = 1$ имеем движение в пустоте.

Пусть в некоторой координатной системе OXYZ движется зеркало P с постоянной скоростью v; (черт. 3 и 4). Для общности предположим, что зеркало расположено в некоторой материальной,

---

[1]) M. Laue. Die Relativitätsheorie 1 p. 124. 1921.

[2]) А. Титов. Известия Уральского Государственного Университета т. II 1921.

изотропной и прозрачной для данного рода лучей среде, и что эта среда движется как целое вместе с зеркалом. ON положительное направление нормали к зеркалу. Выбираем оси OX и OУ так, чтобы OX была направлена по v, а OУ лежала в одной плоскости с нормальюи осью OX, что сделать всегда можно. Заметим еще, что координатную систему мы можем расположить так (вращая вокруг оси OX), чтобы положительное направление нормали лежало: или в первом или во втором квадранте плоскости XOУ. Введем обозначения: $\gamma = \angle$ XON ; OA $=$ q — скорость распространения элементарного цилиндрического пучка лучей «светового луча» в движущей ся среде (величина, зависящая от направления). Причем следует заметить, что направление элементарного пучка лучей, в движущейся среде не соврадает как показывает теория относительности с направлением нормали к той плоской световой волне из которой данный пучек вырезан[1]), т.-е. нельзя говорить о «световом луче» в смысле нормали к плоской световой волне.

α_1—угол падения; α_2—угол отражения; AB$=q_z$;BC$=q_y$; OC$= q_x$; OD$= q_n$; OE$= q_t$—суть проэкции скорости падающего или отраженного луча соответственно на оси OZ; OУ; OX; на нормаль и на плоскость зеркала. OF$= q_\theta$—проэкция скорости падающего или отраженного луча на пересечение плоскости зеркала и плоскости XOУ; β—угол между направлениями q_t и q_θ; В тех слуьаях, когда дело идет о падающем луче, мы будем приписывать всем вышеуказанным величинам индекс 1, об отраженном — индекс 2; таким образом: q_1; q_{1x}; q_{1y}; q_{1n}; q_{1t}; $q_{1\theta}$: α_1; β_1 суть скорость света, ее проэкции и углы, относящиеся к падающему лучу; q_2; q_{2x}........ аналогично к отраженному. Обозначим через v_n проэкцию скорости зеркала на нормаль ON, и через v_t—проэкцию ее на плоскость зеркала. Для удобства чертеж разбит на две части: черт, 3 относится к падающему лучу, черт: 4—к отраженному.

Условимся проэкции скоростей лучей и зеркала на координатные оси и направление нормали считать положительными, когда направления проэкций совпадают с направлениями осей и нормали, в противном случае — отрицательными.

Из черт. 3 и 4, проэктируя ломанную линию BCO на нормаль и плоскость зеркала и, принимая во внимание знаки, найдем:

$$\left.\begin{aligned} q_n &= q_x \cos\gamma + q_y \sin\gamma \\ |q_\theta| &= \pm(-q_x \sin\gamma + q_y \cos\gamma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

Нетрудно убедиться, что указанные соотношения верны как для падающего так и для отраженного луча при любой ориентации луча относительно зеркала и осей. Заметим только, что во втором равенстве (18) и для падающего и для отраженного луча нужно

[1]) M. Laue. Die Relativitätstheorie. 1 p. 184.

одновременно брать знак или плюс или минус (знак минус на нашем чертеже соответствует обратному ходу лучей).

Теперь предположим, что те же самые падающий и отраженный лучи рассматриваются в некоторой другой координатной системе, покоющейся относительно зеркала и расположенной общепринятым способом (ось O^0X^0 совпадает с осью OX; оси $O^0У^0$ и O^0Z^0 соответственно параллельны осям ОУ и OZ). Величины, характеризующие луч падающей или отраженный в этой системе мы будем обозначать теми же буквами, прибавляя только индекс ноль.

Тогда аналогично равенствам (18) найдем равенства:

$$\left.\begin{aligned} q_n &= q_x \cos\gamma^0 + q_y^0 \sin\gamma^0 \\ |q_\theta^0| &= \pm(-q_x^0 \sin\gamma^0 + q_y^0 \cos\gamma^0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

Найдем зависимость между тригонометрическими функциями углов γ и γ^0

Рассмотрим движение некоторой материальной прямой FH с постоянной скоростью v в координатной системе ОХУ (черт. 2). Пусть в некотороой координатной системе $O^0X^0У^0$, относительно которой эта прямая покоится, ея уравнение будет:

$$y^0 = \operatorname{tg}\varepsilon^0 x^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Пременим формулы преобразования Лоренца:

$x^0 = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $y^0 = y$, к координатам точек O^0 и M этой прямой.

$O^0\,(x_1;\,o)$ и $M\,(x_2;\,y^0)$—координаты в системе ОХУ

$O^0\,(o;\,o)$ и $M\,(x^0;\,y^0)$—координаты в системе $O^0X^0У^0$

Тогда формулы преобразования дают:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ o &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Обозначая через ε угол, образованный прямой FH и OX в системе ОХУ и замечая, что

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{y^0}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Из (20) и (21) будем иметь:

$$\operatorname{tg}\varepsilon^0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

т. е. *углы составляемые материальными прямыми с осью OX меняются при движении.*

Обращаемся теперь к черт. 3 и 4. В дальнейшем нас будет интересовать не углы ε, составленный материальной прямой FH с осью OX, а углы γ и γ^0 ,связанные с ε и ε^0, (при принятом нами расположении нормали) следующими зависимостями:

$$\varepsilon = \gamma \pm \frac{\pi}{2}\,;\ \varepsilon^0 = \gamma^0 \pm \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Выводим сокращенные обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}\,;\ \beta_n = \frac{v_n}{c}\,;\ \beta_t = \frac{v_t}{c} \qquad \ldots\ldots (25)$$
$$k = \sqrt{1-\beta^2}\,;\ k_n = \sqrt{1-\beta_n{}^2}$$

Из (23) (24) и (25) получаем:

$$\operatorname{cotg}\gamma^0 = k \operatorname{cotg}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Весьма просто найдутся также соотношения между косинусами и синусами γ и γ^0.

Замечаем из черт. 3 и 4.

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{v_n}{v_t} = \frac{\beta_n}{\beta_t}\,,\ \sin\gamma = \frac{v_t}{v} = \frac{\beta_t}{\beta}\,;\ \cos\gamma = \frac{v_n}{v} = \frac{\beta_n}{\beta} \quad \ldots\ldots (27)$$

Это соотношения выполняются также и при положении нормали во втором квадрате.

Имеем:

$$\sin\gamma^0 = \frac{1}{\mp\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\gamma^0}}\,;\ \cos\gamma^0 = \pm\frac{\operatorname{cotg}\gamma^0}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\gamma^0}}\,;$$

подставляя значения $\operatorname{cotg}\gamma^0$ из (26) и $\operatorname{cotg}\gamma$ из (27) получаем:

$$\sin\gamma^0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k^2\,\beta_n{}^2}{\beta_t{}^2}}} = \mp\frac{\beta_t}{\sqrt{\beta_t{}^2+k^2\,\beta_n{}^2}} = \pm\frac{\beta_t}{k_n\,\beta} \qquad (28)$$

$$\cos\gamma^0 = \pm\frac{k\,\beta_n}{\sqrt{\beta_t+k^2\,\beta_n{}^2}} = \pm\frac{k\,\beta_n}{k_n\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Вводя в (28) и (29) $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ из (27) будем иметь:

$$\sin\gamma^0 = \frac{1}{k_n}\sin\gamma$$
$$\cos\gamma^0 = \frac{k}{k_n}\cos\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots (30)$$

Двойной знак не имеет здесь места, т. к. синусы γ и γ^0 имеют одинаковый знак (также и косинусы). Докажем теперь, что лучи падающий и отраженный лежат в одной плоскоти с нормалью к движущемуся зеркалу.

В координатной системе, покоющейся относительно зеркала, на основании закона отражения света от зеркала, мы имеем: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0$; $\zeta_1^0 = \zeta_2^0$ и так как среда изотропна, $q_1^0 = q_2^0$, то, как нетрудно в этом убедиться, расматривая тригонометрические функции указанных углов, мы имеем:

$$|q_{1t}^0| = |q_{2t}^0|\,;\ |q_{1e}^0| = |q_{2e}^0|\,;\ \text{и}\ q_{1z}^0 = q_{2z}^0 \quad \ldots (31)$$

т. к. знаки q_{1z}^0 и q_{2z}^0 одинаковы. Таким образом мы можем выписать равенство:

$$\operatorname{cotg}\zeta_1^0 = \operatorname{cosg}\zeta_2^0;\ \text{или}\ \frac{|q_{1e}^0|}{q_{1z}^0} = \frac{|q_{2e}^0|}{q_{2z}^0} \quad \ldots (32)$$

Выражая числителей равенства (32) при помощи (19) получим:

$$\frac{\pm(-q_{1x}^0 \sin\gamma^0 + q_{1y}^0 \cos\gamma^0)}{q_{1z}^0} = \frac{\pm(-q_{2x}^0 \sin\gamma^0 + q_{2y}^0 \cos\gamma^0)}{q_{2z}^0}. \quad (33)$$

На основании теоремы сложения скоростей Энштейна[1])

$$q_x = \frac{q_x^0 + v}{1 + \frac{v q_x^0}{c^2}}\,;\quad q_y = \frac{k q_y^0}{1 + \frac{v q_x^0}{c^2}}\,;\quad q_z = \frac{k q_z^0}{1 + \frac{v q_x^0}{c^2}} \quad \ldots (34)$$

Прибавляя к обоим частям равенства (33) по $\pm\left(\frac{-v \operatorname{Sin}\gamma^0}{q_z^0}\right)$, имеем:

$$\frac{-(q_{1x}^0 + v)\sin\gamma^0 + q_{1y}^0\cos\gamma^0}{q_{1z}^0} = \frac{-(q_{2x}^0 + v)\sin\gamma^0 + q_{2y}^0\cos\gamma^0}{q_{2z}^0} \quad (35)$$

Подставляя в (35) значения: $(q_x^0 + v)$; q_y^0; q_z^0 из (34) и $\sin\gamma^0$ и $\cos\gamma^0$ из (30)

$$\frac{-q_{1x}\left(1 + \frac{v q_{1x}^0}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{k_n}\sin\gamma + \frac{q_y^1}{k}\left(1 + \frac{v q_{1x}^0}{c^2}\right)\cdot\frac{k}{k_n}\cos\gamma}{\frac{q_{1z}}{k}\left(1 + \frac{v q_{1x}^0}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{-q_{2x}\left(1 + \frac{v q_{2x}^0}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{k_n}\sin\gamma + \frac{q_{2y}}{k}\left(1 + \frac{v q_{2x}}{c^2}\right)\cdot\frac{k}{k_n}\cos\gamma}{\frac{q_{2z}}{k}\left(1 + \frac{v q_{2x}^0}{c^2}\right)}$$

после сокращания будем иметь:

$$\frac{-q_{1x}\sin\gamma + q_{1y}\cos\gamma}{q_{1z}} = \frac{-q_{2x}\sin\gamma + q_{2y}\cos\gamma}{q_{2z}}$$

[1]) A Einstein. Annalen d. Phys. 17 p. 891. 1905.

или в согласии с (18):

$$\frac{|q_{1e}|}{q_{1z}} = \frac{|q_{2e}|}{q_{2z}}\text{, т. е. } \operatorname{cotg}\mathfrak{z}_1 = \operatorname{cotg}\mathfrak{z}_2$$

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Луч падающий и отраженный лежат в одной плоскости с нормалью к зеркалу и в случае движения зеркала.

В частном случае если $\mathfrak{z}^0 = 0$, рассмотренное доказательство не применимо, т. к. $\operatorname{cotg}\mathfrak{z}^0 = \infty$; но если $\mathfrak{z}_1{}^0 = \mathfrak{z}_2{}^0 = 0$, то из (34) $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = 0$, т. е. отражение происходит в той же плоскости XOY.

Теперь обращаемся к нахождению зависимости между α_1 и α_2; Т. к. в системе, покоющейся относительно зеркала $\alpha_1{}^0 = \alpha_2^0$; а $\cos\alpha_1{}^0 = \frac{|q_n^0|}{q^0}$; то $q_{1n}^0 = -q_{2n}^0$ . . . (37), т. к. знаки q_{1n}^0 и q_{2n}^0 всегда противоположны; но $q_n^0 = q_x^0 \cos\gamma^0 + q_y^0 \sin\gamma^0$. На основании теоремы сложения скоростей Эйнштейна имеем:

$$q_x^0 = \frac{q_x - v}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}\;;\quad q_y^0 = \frac{kq_y}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}\;;\quad q_z^0 = \frac{kq_z}{1 - \frac{vq_x}{c^2}} \quad \ldots \quad (38)$$

Подставляя из (38) значения: q_x^0; q_y^0 и значения $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ из (30) в выражение для q_n^0 получим

$$q_n{}^0 = \frac{(q_x - v)\cdot\frac{k}{k_n}\cos\gamma + k\,q_y\cdot\frac{1}{k_n}\sin\gamma}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}\;;$$

$$q_n^0 = \frac{k}{k_n}\cdot\frac{q_x\cos\gamma + q_y\sin\gamma - v\cos\gamma}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}$$

и принимая во внимание (18) и (27)

$$q_n^0 = \frac{k}{k_n}\cdot\frac{q_n - v_n}{1 - \frac{vq_x}{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Т. к. $|q_z| = |q_t|\sin\mathfrak{z}$, то из (38) получаем

$$|q_z^0| = \frac{k|q_t|\sin\mathfrak{z}}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}$$

Рассмотрим отношение $\frac{q_n{}^0}{|q_z{}^0|} = \frac{1}{k_n}\,\frac{q_n - v_n}{|q_t|\sin\mathfrak{z}}$;

предполагая $|q_z^0| \neq 0$

Принимая во внимание (37) и вводя индексы падающего и отраженного лучей, получаем равенство

$$\frac{q_{1n}-v_n}{|q_{1t}|}=\frac{-q_{2n}+v_n}{|q_{2t}|} \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

Замечая, что знаки q_{1n} и q_{2n} противоположны, $q_{1n} < 0$; $q_{2n} > 0$

$$\text{и что } \frac{|q_n|}{q}=\cos\alpha;\ \text{а } \frac{|q_t|}{q}=\sin\alpha \quad \ldots\ldots (41)$$

по разделении числителя и знаменателя левой части равенства (40) на q_1; а—правой части на q_2, будем иметь *закон отражения от движущегося вместе со средой зеркала в следующей форме:*

$$\frac{+n_1\beta_n+\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}=\frac{-n_2\beta_n+\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \quad \ldots\ldots (42)$$

где $n_1=\frac{c}{q_1}$ и $n_2=\frac{c}{q_2}$, если можно так выразится, своеобразные показатели преломления среды.

В случае, если $q_z^o=0$; отношение $\frac{q_n^0}{q_z^o}=\infty$, но легко показать и в этом случае, что α_1 и α_2 удовлетворяют тому же закону.

Покажем, что $\frac{|q_{1t}|}{1-\frac{vq_{1x}}{c^2}}=\frac{|q_{2t}|}{1-\frac{vq_{2x}}{c^2}}$ и в случе $q_z^o=0$.

Из равенств (18)

$$\pm(q_x\sin\gamma+q_y\cos\gamma)=|q_0|=|q_t|$$

Подставляя из (34) значения: q_x и q_y и значения $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ из (30), получим:

$$\frac{\pm\left[-(q_x^o+v)\,.\ k_n\sin\gamma^0+k\,q_y^o\,.\ \frac{k_n}{k}\cos\gamma^0\right]}{1+\frac{vq_x^o}{c^2}}=|q_t|$$

и далее

$$\pm k_n(-q_x^o\sin\gamma^0+q_y^o\cos\gamma^0)\mp v\,k_n\sin\gamma^0=|q_t|\left(1+\frac{vq_x^o}{c^2}\right);$$

принимая во внимание (19) и (36)

$$k_n|q_t^0|\mp v_t=|q_t|\left(1+\frac{vq_x^o}{c^2}\right)$$

Вводя индексы падающего и отраженного лучей, имеем равенства:

$$k_n \mid q_t \mid \mp v_t = \mid q_{1t} \mid \left(1 + \frac{v q_{1x}^0}{c^2}\right) = \mid q_{2t} \mid \left(1 + \frac{v q_{2x}^0}{c^2}\right) ;$$

Принимая во внимание известное из теории относительности равенство[1])

$$\left(1 + \frac{v q_x^0}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v q_x}{c^2}\right) = k^2, \text{ получим}$$

$$\frac{\mid q_{1t} \mid}{1 - \frac{v q_{1x}}{c^2}} = \frac{\mid q_{2t} \mid}{1 - \frac{v q_{2x}}{c^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

отсюда в соединении с равенствами (39) и (41) получаем равенство (42).

Полученное нами выражение для закона отражения света от движущегося зеркала непосредственно дает одну из форм, найденных M. Abraham,ом. Так если явление рассматривается в пустоте, то $q_1 = q_2 = c$ и равенство (42) дает

$$\frac{+\beta_n + \cos\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{-\beta_n + \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}, \text{ т. е. формулу (16)}$$

Равенство (42) показывает, что без дополнительного исследования невозможно решить вопрос зависит или нет закон отражения от движущегося зеркала от тангенциального компонента скорости зеркала, ибо форма (42), полученная нами, содержит q_1 и q_2, а эти величины зависят от обоих компонентов скорости зеркала. Для случая движения в пустоте компонент v_t выпадает.

Легко видеть, что равенство (42) оставляет неопределенным α_2, ибо q_1 и q_2 зависят от направлений. Однако нетрудно показать, что если задан падающий луч в движущейся среде, то при помощи некоторых вспомогательных равенств эта неопределенность в определении α_2 может быть устранена. Определим как следует понимать «задан падающий луч». Пусть луч задан полярными координатами углом ϑ, между осью OX и обратным направлением луча и азимутальным углом φ между плоскостями AOX л XOУ. Мы предпочтем пользоваться углами α_1 и γ вместо угла φ. Нетрудно видеть, что углы ϑ_1 ; α_1 и γ вполне определяют положение луча. Кроме того пусть дана скорость падающего луча q_1; аналогично положение отраженного луча определяется углами ϑ_2; α_2; γ.

Рассмотрим сферические треугольники A_1XN и A_2XN (черт. 5) (A_1O — направление падающего луча, OA_2 — отраженного; OX— ось абсцисс; ON — направление нормали к зеркалу) и обозначим двугранные углы A_1NOX и A_2NOX соответственно через Θ_1 и Θ_2. Заметим, что $\Theta_2 = \pi - \Theta_1$ ... (44) из сферической тригонометрии имеем:

[1]) M. Laue. Die Relativitätstheorie 1 p. 64.

$$\begin{aligned} \cos\vartheta_1 &= \cos\alpha_1 \cos\gamma + \sin\alpha_1 \sin\gamma \cos\Theta_1 \\ \cos\vartheta_2 &= \cos\alpha_2 \cos\gamma + \sin\alpha_2 \sin\gamma \cos\Theta_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots (45)$$

эти равенства показывают, что угол ϑ_2 определяется углами ϑ_1; γ; α_1 и α_2.

Теория относительности дает зависимости между скоростью q светового луча в движущейся среде, его наклонением ϑ к оси OX и соответственными величинами q^0 и ϑ^0 в координатной системе, покоющейся относительно среды (вместо q^0 обыкновенно вводят показатель преломления n^0). Так теорема сложения скоростей Эйнштейна при наших обозначениях дает[1])

$$q = c\,\frac{\sqrt{c^2 + n^{02} v^2 + 2 v c n^0 \cos\vartheta^0 - v^2 \sin^2\vartheta^0}}{c n^0 + v \cos\vartheta^0} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

$$\text{и } \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta^0 \sqrt{c^2 - v^2}}{c \cos\vartheta^0 + n^0 v} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

Вводя в (46) и (47) индексы падающего и отраженного лучей, мы получим четыре уравнения, которые по исключении $\vartheta_1{}^0$; $\vartheta_2{}^0$ и n^0 могут дать зависимость q_2 от q_1; ϑ_1 и ϑ_2. [Следует иметь в виду, что ϑ_1 равенств (46) и (47) равно пополнению к ϑ_1 равенства (45)].

Принимая во внимание следствие из (45) относительно ϑ_2 и уравнение (42), мы можем сказать, что неопределенность при определении α_2 устраняется, если падающий луч задан величинами: α_1; ϑ_1 и q_1.

Тот факт, что основные положения электродинамики приводят к той же форме закона отражения от движущегося зеркала, которую дает и теория относительности, имеет большой теоретический интерес.

Как известно теория относительности с одной стороны констатирует отрицательные результаты опытов, направленных к обнаружению поступательного движения земли в пространстве, с другой стороны при помощи формул преобразования Лоренца приводит к различным соотношениям, положительным закономерностям, которые должны бы наблюдаться в движущихся телах. Проверка, насколько осуществляются эти закономерности, предсказанные теорией, весьма существенна, ибо этим подводится прочный базис под теорию. Но к сожалению положительные выводы теории могут быть подтверждены на ограниченном круге явлений, вследствие весьма больших скоростей, которые для этого требуются; к таким явлениям относятся: отклонение β лучей радия в электрическом и магнитном поле, тончайшая структура спектральных линий по Зоммерфельду, коэффициент увлечения света и некотор. другие.

Специфические законы явлений в движущихся системах, предсказываемые теорией относительности составляют ее содержание

[1]) M. Laue. Die Relativitätstheorie 1 p. 184.

как таковой, и казалось бы, что они могут быть проверяемы только опытом. Возможность их проверки со стороны классической электродинамики (как, например, в данном случае) нуждается в об,яснении.

Конечно, по скольку в классической электродинамике мы не пользуемся преобразованиями Галилея — Ньютона, или другими преобразованиями, отличными от Лоренцовых,—мы вправе ожидать, что наши выводы относительно явлений в движущихся системах не будут противоречить выводам теории относительности; но это не устраняет необходимости об,яснения.

Любой данный вывод для своего появления требует определенной, минимальной группы основных предпосылок, независимо от того каким путем данный вывод получен. При выводе закона отражения света по второму способу (теория относит.) в эту группу основных предпосылок входят два постулата специальной теории относительности.

Тот факт, что классическая электродинамика и специальная теория относительности приводят к одинаковой форме закона отражения от движущегося зеркала, можно об'яснить одним из двух следующих предположений:

1. *Основные предпосылки классической электродинамики с одной стороны, и два постулата специальной теории относительности с другой стороны не являются независимыми друг от друга.*

2. *В выводе закона отражения, данном* M. Abraham,ом, *были неявно введены постулаты специальной теории относительности*

Второе предположение мне кажется более вероятным. Исследование этого вопроса представляет несомненно большой интерес.

Екатеринбург, 2 ноября 1923 г.

А. Титов.

A. M. Titow.

Ableitung des Gesetzes über die Reflexion des Lichtes von einem sich bewegenden Spiegel auf Grundlage des Einsteinschen Additionstheorems der Geschwindigkeiten.

Der Autor weist auf eine Arbeit von M. Abraham*) hin, in welcher, nur auf Grundlage der Fundamentalgesetze der Elektrodynamik, eine Ableitung der Reflexion des Lichtes von einem sich bewegenden Spiegel gegeben ist.

In der vorliegenden Arbit ist gegeben eine Ableitung des Gesetzes der Reflexion des Lichtes von einem sich bewegenden Spiegel auf Grundlage der Theorie der Relativität. Dabei benutzt der Autor nicht mal die Formeln der ebenen elektromagnetichen Wellen, d. h. die Erscheinung wird nicnt ihrem Wesen nach untersucht. Die ableitung stützt sich auf die formellen Grundlagen der vektoriellen Zerlegung der Geschwindigkeiten der einfallenden und der reflektierten Strahlen und auf das Theorem von Einstein über Summierung der Geschwindigkeiten beim Uebergang von einem Koordinaten — System zu einem anderen. Der Betrachtung wird unterzogen der allgemeine Fall einer beliebigen Lage des Spiegels des Strahles und der Geschwindigkeit des Spiegels. Bei der Ableitung wird nicht die Annahme gemacht, dass die gleichzeitige Existenz der tangentielen und normalen Komponenten der Bewegungsgeschwindigkeit des Spiegels das Reflexions — Gesetz nicht ändert. Ausserdem wird die Untersuchung in allgemeinerer Fotm geführt nämlich es wird nach der Fall betrachtet, dass der Spiegel sich bewegt Zugleich mit dem Medium, in welchem er sich befindet.

Die Untersuchung führt zu folgender Form des Gesetzes der Reflexion des Lichtes von einem sich bewegenden Spiegel.

$$\frac{+ n_1 \beta_n + \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{- n_2 \beta_n + \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}$$

wo α_1 ist der Einfallswinkel, α_2—der Reflexionswinkel, $\beta_n = \frac{v_n}{c}$,

$n_1 = \frac{c}{q_1}$, $n_2 = \frac{c}{q_2}$, v_n — der Komponente der Geschwindigkeit des Spiegels in der Richtung der Normalen, q_1 und q_2 die Geschwindigkeiten des einfallenden und reflektirten Strahlen, c — die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum. Wenn $q_1 = q_2 = c$, so er-

[1]) M. Abraham. Annal. d. Phys. 14 p. 236. 1904.

hält man eine der Formen des Reflekxions —Gesetzes, wie sie Abraham giebt. Auch aus dem sich auf der Reflexions —Gesetz beziehenden Ausführungen von M. Laue[1]) kann eine der von Abraham gegebenen Formen leicht erchalten werden und wenn Laue nicht selbst darauf hingewiesen hat, so hält der Autor das nur für Zufall.

Das Faktum, dass die Grundlagen der Elektrodynamik zu denselben Schlüsssen führen, wie die Grundlagen der Theorie der Relativität (gleiche Form des Gesetzes der Reflexion von einem sich bewegenden Spiegel) kann erklärt werden durch eine von den zwei Voraussetzungen:

1) Die Grundlagen der klassischen Elektrodynamik einerseits und die zwei Postulaten der Special Relativitätstheorie andererseits sind voneinander abhangig.

2) In der Ableitung des Reflexionsgesetzes, der von M. Abraham gegeben war, nicht evident die Postulaten der special Relativitatstheorie eingeführt wurden.

Die zweite Voraussetzung scheint dem Autor richtiger zu sein.

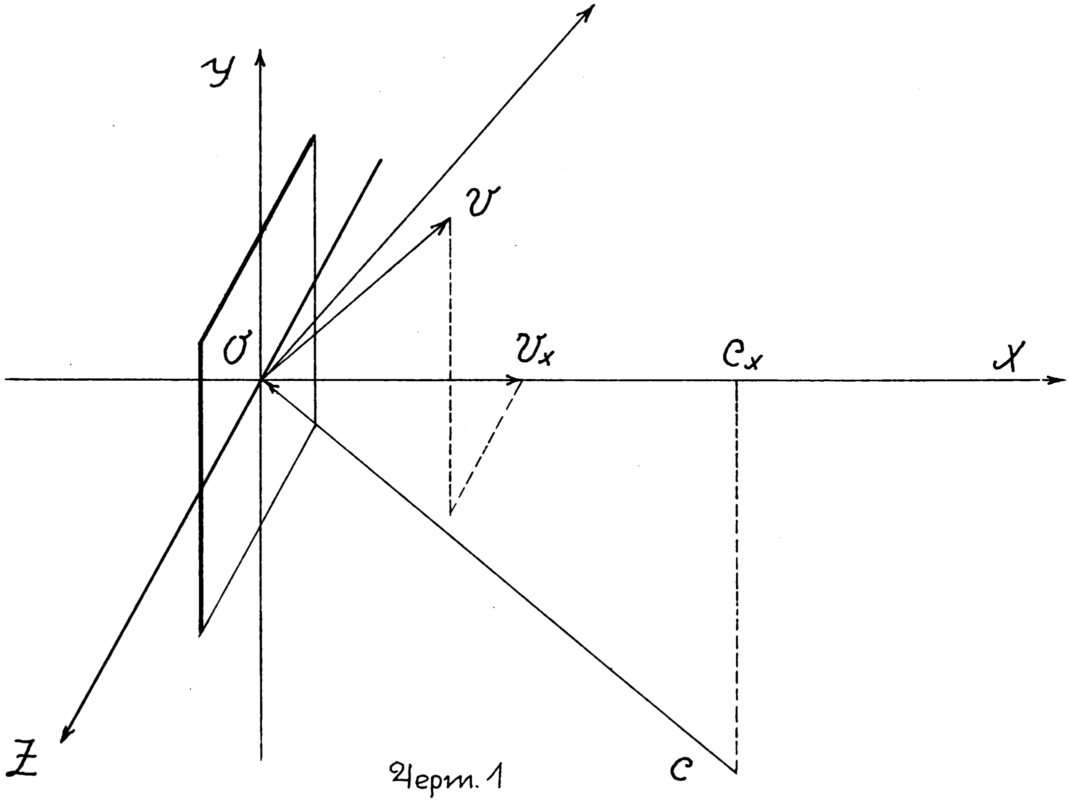
Die Erforschung dieser Frage bietet ein grosses theoretischen Inreresse.

Ekaterinburg 2 November 1923.

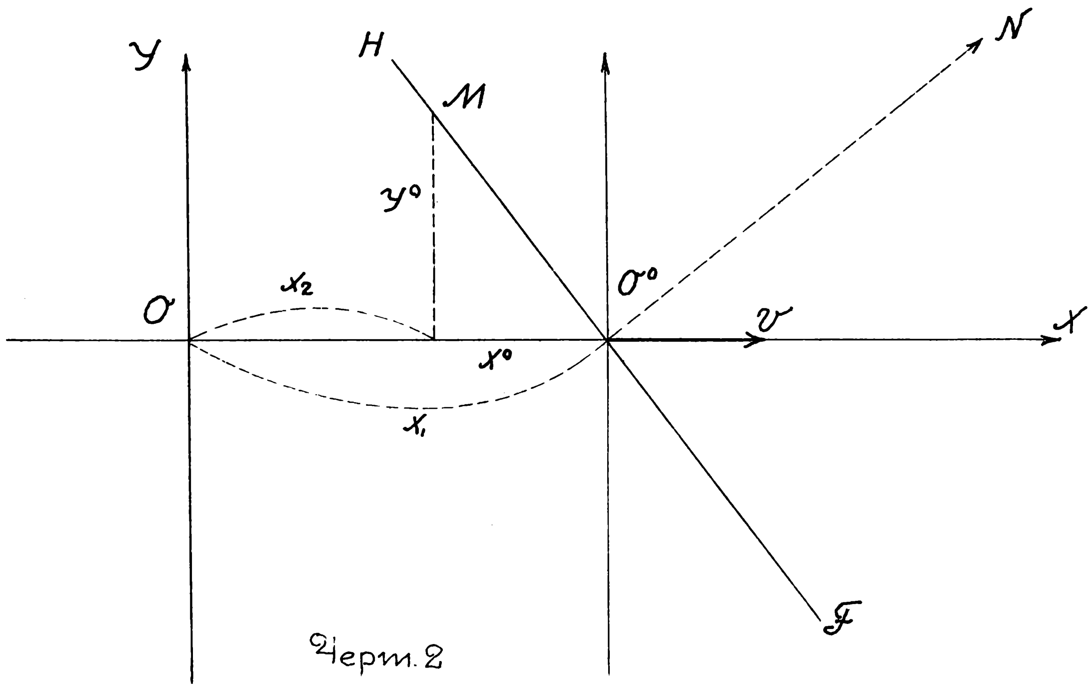
A. M. Titow

---

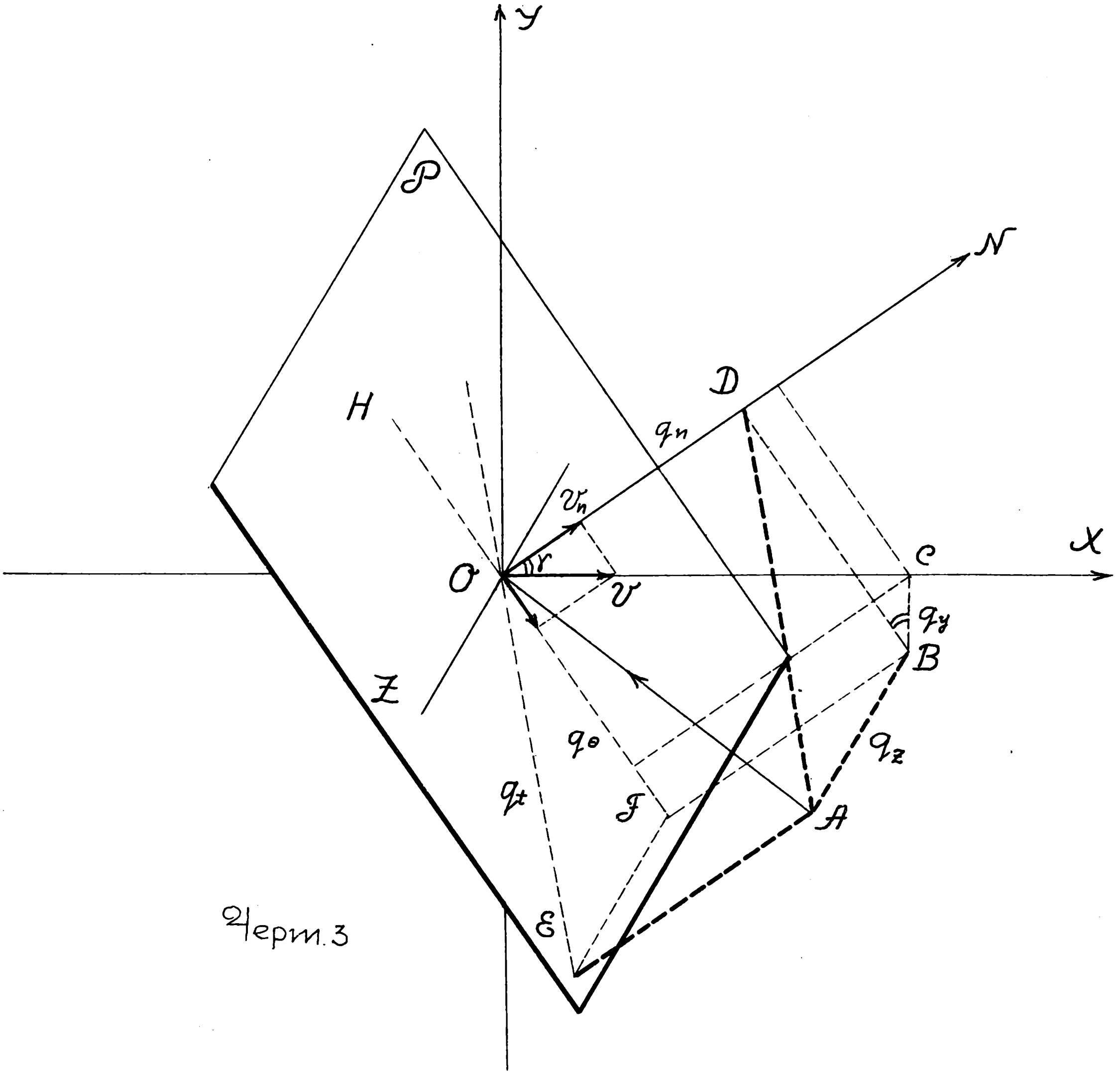
[1]) M. Laue. Die Relativitätstheorie 1 p 124. 1921.



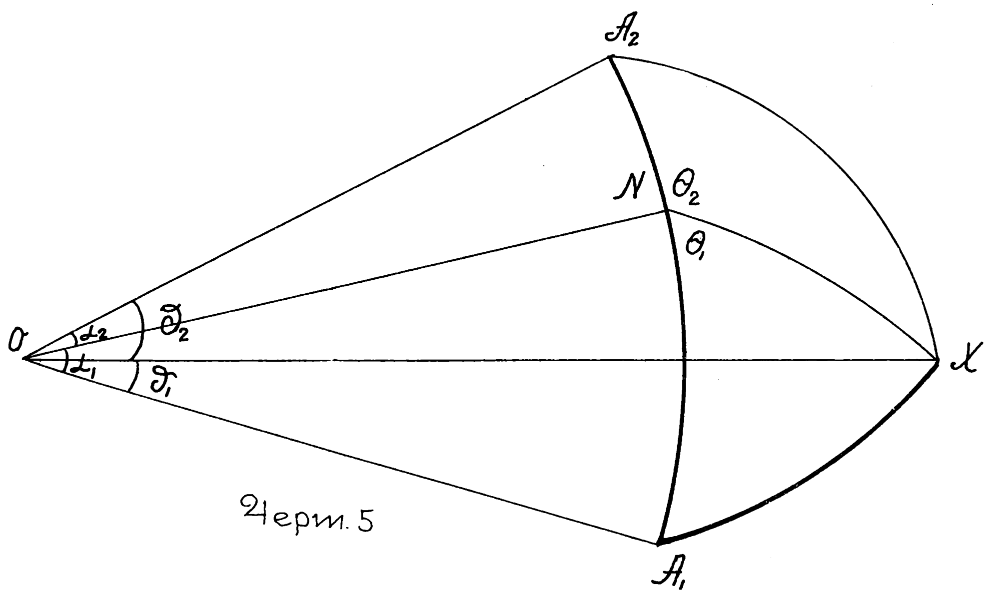
Черт. 1



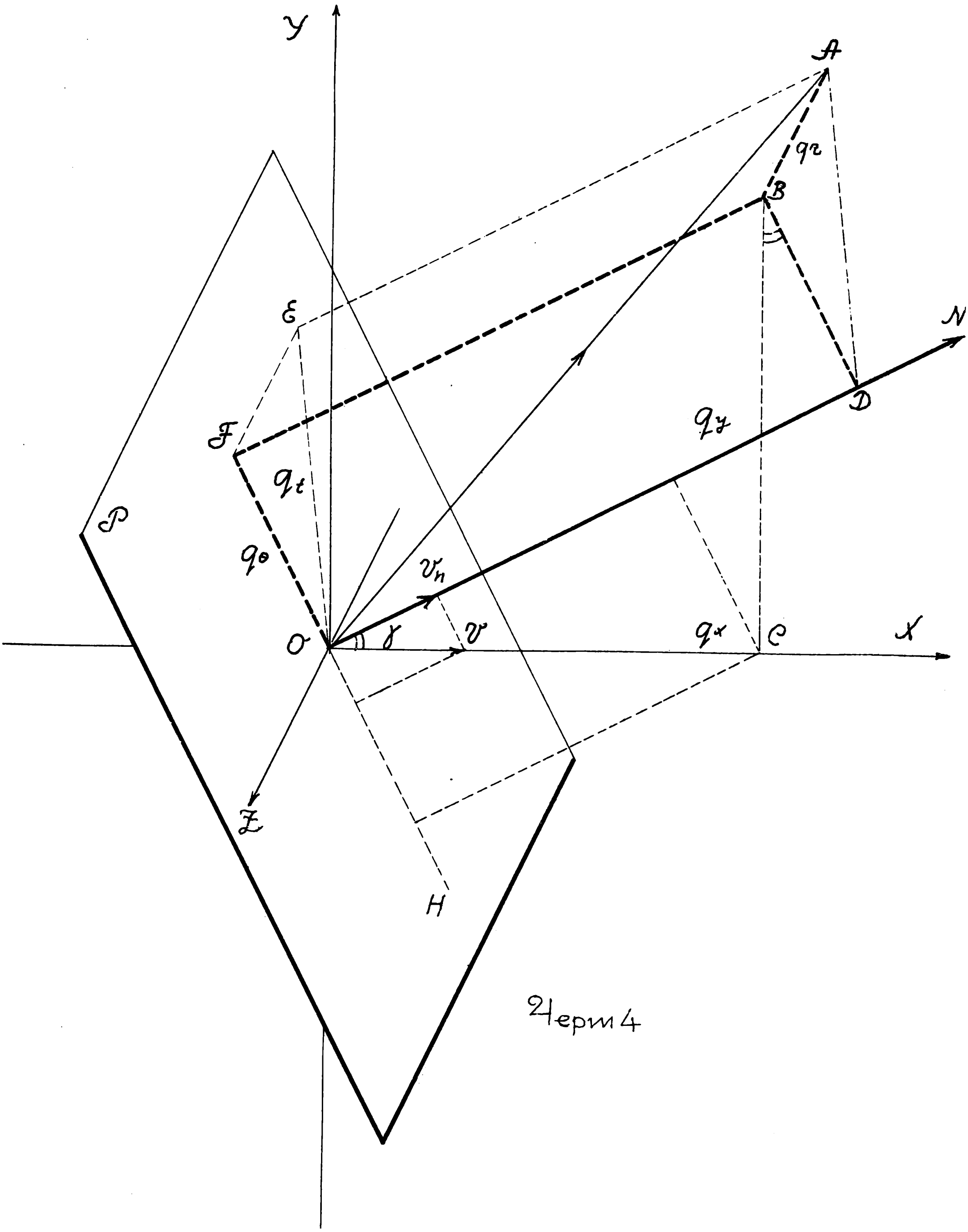
Черт. 2


Y
P
N
D
H
q_n
v_n
X
O
γ
v
C
q_y
B
Z
q_θ
q_z
q_t
F
A
E

Черт. 3


A_2
N
θ_2
θ_1
O
α_2
ϑ_2
α_1
ϑ_1
X
A_1

Черт. 5



Черт 4